

# 基于混合有限元的显式时域完美匹配层研究

周鹏发<sup>1</sup>, 申玉生<sup>1,2</sup>, 高 登<sup>1</sup>, 张 熙<sup>1</sup>, 黄海峰<sup>1</sup>, 高 波<sup>1</sup>

(1. 西南交通大学 交通隧道工程教育部重点实验室, 四川 成都 610031;

2. 西南交通大学 陆地交通地质灾害防治技术国家工程研究中心, 四川 成都 611756)

**摘 要:** 为解决岩土动力学分析中的外行波吸收问题, 提出了一种基于中心差分法的显式混合有限元时域完美匹配层(perfectly matched layer, 简称 PML)。推导了适用于显式积分的二维及三维有限元半离散方程, 并构建了二维应力-位移场混合单元 Q4/4 和三维应力-位移场混合单元 HEX8/8 进行空间离散, 提出了一种适用于三阶动力方程的扩展中心差分法显式积分格式, 并将其应用于求解三维时域完美匹配层方程。基于 ABAQUS/Explicit 进行了程序实现, 开展数值试验分析了该人工边界在不同地层类型、波动类型、波动频率及边界厚度等条件下的吸收性能。结果表明: 各计算工况下完美匹配层均能有条件的收敛; 当完美匹配层厚度大于 10 层单元时, 各工况截断模型响应与扩大模型响应的归一化均方根偏差均小于 2%。所提出的积分格式及数值实现方案具有良好的稳定性和计算精度, 不同地层条件下完美匹配层对不同类型及不同频率的外行波均表现出良好的吸收性能。研究成果在岩土动力学分析领域具有广泛的应用前景。

**关 键 词:** 人工边界; 完美匹配层; 混合有限元; ABAQUS; 弹性波; VUEL

中图分类号: U 25; P 315.9

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2025) 05-1605-16

## Explicit time-domain perfectly matched layers base on mixed finite element method

ZHOU Peng-fa<sup>1</sup>, SHEN Yu-sheng<sup>1,2</sup>, GAO Deng<sup>1</sup>, ZHANG Xi<sup>1</sup>, HUANG Hai-feng<sup>1</sup>, GAO Bo<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Transportation Tunnel Engineering, Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China;

2. National Engineering Research Center of Geological Disaster Prevention Technology in Land Transportation,

Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 611756, China)

**Abstract:** To address the challenge of absorbing outgoing waves in geotechnical dynamic analysis, an explicit mixed finite element time-domain perfectly matched layer (PML) based on the central difference integration scheme is proposed. The two-dimensional and three-dimensional semi-discrete finite element equations suitable for explicit integration were derived. A two-dimensional stress-displacement mixed element Q4/4 and a three-dimensional stress-displacement mixed element HEX8/8 were developed for spatial discretization. An extended central difference explicit integration scheme was proposed to solve the third-order dynamic equations arising from the three-dimensional PML formulation. The implementation was carried out in ABAQUS/Explicit, and several numerical experiments were conducted to analyze the absorption performance of the artificial boundary under varying conditions, including soil types, wave types, wave frequencies, and boundary thickness. The results indicate that the PML achieves conditional convergence under all computational conditions. When the PML thickness exceeds 10 elements, the normalized root mean square deviation between the truncated and enlarged model responses is less than 2%. The proposed integration scheme and numerical implementation exhibit good stability and computational accuracy. For different soil types, the PML demonstrates excellent absorption performance for outgoing waves of various types and frequencies. The research findings have broad applications in the geotechnical dynamic analysis.

**Keywords:** artificial boundary; perfectly matched layer; mixed finite element; ABAQUS; elastic waves; VUEL

## 1 引言

在自然界中各类动力荷载(地震<sup>[1]</sup>、爆炸冲击<sup>[2]</sup>、列车振动<sup>[3]</sup>等)作用下,岩土-结构动力相互作用对工程结构安全性具有不容忽视的影响。动力人工边界是影响此类问题数值模拟精度的关键因素。

近年来,国内外已发展了多种人工边界,主要分为全局人工边界和局部人工边界两类<sup>[4]</sup>。全局人工边界由波动方程的远场解导出,因边界节点存在全局耦合特性使其计算消耗较大。而局部人工边界的边界节点只与临近单元相互作用,具有较高的计算效率<sup>[5]</sup>。代表性的局部人工边界包括黏性边界<sup>[6]</sup>、黏弹性边界<sup>[7-8]</sup>、透射边界<sup>[9]</sup>、无限元边界<sup>[10]</sup>和完美匹配层<sup>[11]</sup>等。最早由 Lysmer 等<sup>[6]</sup>提出的黏性边界是第一个局部人工边界,其在计算多维波动问题时存在低频稳定性问题。Deeks 等<sup>[12]</sup>提出了黏弹性边界,刘晶波等<sup>[7]</sup>对其进行了发展并提出了三维时域黏弹性边界。同时,刘晶波<sup>[4]</sup>、谷音<sup>[13]</sup>等还发展了一致黏弹性人工边界,提高了集中黏弹性边界的使用效率。透射边界是一类具有高阶精度的局部人工边界,但存在高频失稳问题<sup>[14]</sup>。完美匹配层<sup>[5]</sup>是较晚应用于弹塑性动力分析领域的一类局部人工边界,理论上其可被视为波动方程在复数坐标空间的解析拓延,也可以被解释为几何空间度规的改变,因此具有清晰的理论背景<sup>[15]</sup>。相比于传统吸收边界,完美匹配层除保留了局部人工边界在计算效率方面的优势外,还具有如下优点:①具有更高的外行波吸收效率<sup>[5]</sup>;②理论上可以吸收任意角度和任意频率的外行波<sup>[16]</sup>;③当地层存在各向异性特征时,完美匹配层依然能够强迫外行波沿着传播路径快速衰减,因此具有更广泛的适用范围。鉴于上述优势,自完美匹配层提出以来就受到了学界的广泛关注<sup>[17-18]</sup>。

完美匹配层(perfectly matched layer, 简称 PML)最早由 Berenger<sup>[19]</sup>提出并用于电磁波吸收,Chew 等<sup>[20]</sup>在有限差分法中将其引入到弹塑性动力学分析中。早期的完美匹配层常通过对未知场变量进行分解来避免方程在频域-时域转换过程中的卷积运算,称为分裂场完美匹配层(split-field PML)。分裂场完美匹配层的主要缺陷是会改变动力方程的结构,使其难以植入到现有程序中<sup>[16]</sup>。Basu 等<sup>[21]</sup>基于有限元方法提出了非分裂场形式的完美匹配层(unsplit-field PML)进行谐波弹塑性动力学分析,随后又将其扩展到显示动力有限元分析中。由于 Basu<sup>[22]</sup>采用复杂的异步积分格式,计算效率相对低下。Kucukcoban 等<sup>[11, 16]</sup>以混合有限元理论为基础,提出了位移-应

力混合形式的非分裂场完美匹配层。该混合有限元时域完美匹配层的理论清晰且易于植入到现有程序中,因此很快得到了进一步发展和应用<sup>[23-24]</sup>。在应用方面,Zhang 等<sup>[5]</sup>将混合元时域完美匹配层用于分析地震作用下的土-结构相互作用问题,取得了较好的应用效果。在国内,完美匹配层主要在地震学研究中应用较多,在岩土地震工程学方面的应用还相对较少<sup>[25]</sup>。近期,彭刚等<sup>[26]</sup>将完美匹配层人工边界应用于混凝土坝-地基动力相互作用分析。Zhang 等<sup>[27]</sup>采用比例边界元的方法来实现完美匹配层,使其在复杂几何边界条件下具有很好的适应性。

综上所述,完美匹配层人工边界是近年来的研究热点,但在工程应用研究方面还相对滞后。ABAQUS 是一款功能强大的通用有限元软件,目前已有部分学者将完美匹配层植入到 ABAQUS 中开展应用研究。例如,Poul 等<sup>[28]</sup>将 2D 维完美匹配层植入到 ABAQUS 中开展黏弹性波的传播问题研究。Zhang 等<sup>[5]</sup>的研究也已在 ABAQUS 中实现了混合元时域完美匹配层。但是,现有的研究中均采用隐式方法进行实现,而完美匹配层的 ABAQUS/Explicit 实现还未见到。考虑到 ABAQUS 显式模块在集群并行计算方面的优势<sup>[29]</sup>,将完美匹配层植入其中能够有效推动这一技术的发展。

鉴于此,本文提出了基于扩展中心差分法的显式混合有限元时域完美匹配层动力人工边界,利用 ABAQUS/Explicit 中的 VUEL 子程序接口进行数值实现,通过开展数值试验对完美匹配层的波动吸收效果、数值实现方案的精度及稳定性等进行验证。所开发的完美匹配层程序能与 ABAQUS 内置的位移有限元程序耦合求解,且可以直接部署到高性能计算集群(high performance computing cluster, 简称 HPCC)上开展计算。本研究能够为工程结构的岩土-结构动力相互作用分析研究提供有益参考。

## 2 混合元完美匹配层理论

### 2.1 坐标复伸展函数

完美匹配层通过对坐标的“复伸展”来迫使外行波发生压缩和衰减:

$$s \mapsto \tilde{s} = s_0 + \int_{s_0}^s \lambda_s(s', \omega) ds' \quad (1)$$

式中: $s$  为几何空间中的任意坐标,对于二维问题  $s = x, y$ , 对于三维问题  $s = x, y, z$ ;  $s'$  为坐标积分变量;“ $\mapsto$ ”为映射符号; $\tilde{s}$  为与坐标  $s$  相对应的伸展坐标; $s_0$  为 PML 域的起始坐标; $\omega$  为圆频率(rad/s); $\lambda_s$  为坐标  $s$  对应的坐标伸展函数,常用的坐标伸展

函数形式为

$$\lambda_s(s, \omega) = \alpha_s(s) + \frac{1}{i\omega} \beta_s(s) \quad (2)$$

式中： $\alpha_s$  和  $\beta_s$  分别为缩放函数和衰减函数，其中  $\alpha_s \geq 1$ ， $\beta_s \geq 0$ 。本文采用如下常用形式：

$$\alpha_s(s) = 1 + \alpha_0 \left[ \frac{(s-s_0)n_s}{L_{\text{pml}}} \right]^m, s_0 \leq s \leq s_t \quad (3)$$

$$\beta_s(s) = \beta_0 \left[ \frac{(s-s_0)n_s}{L_{\text{pml}}} \right]^m, s_0 \leq s \leq s_t \quad (4)$$

式中： $n_s$  为坐标  $s$  上表征完美匹配层外法线方向的单位量，当  $s-s_0 > 0$  时取  $n_s = 1$ ，当  $s-s_0 < 0$  时取为  $n_s = -1$ ，这里是作者为了改善角部完美匹配层的吸收效果而进行的改进，Kucukcoban 等<sup>[16]</sup>认为  $n_s$  为完美匹配层外法线单位向量在坐标  $s$  上的分量； $L_{\text{pml}}$  为完美匹配层厚度 (m)； $m$  为伸展函数多项式的次数，本文取为 2； $s_t$  为 PML 域的终点坐标； $\alpha_0$  和  $\beta_0$  均为用户参数，分别按以下两式确定：

$$\alpha_0 = \frac{(m+1)B}{2L_{\text{pml}}} \lg\left(\frac{1}{R}\right) \quad (5)$$

$$\beta_0 = \frac{(m+1)c_p}{2L_{\text{pml}}} \lg\left(\frac{1}{R}\right) \quad (6)$$

式中： $B$  为单元特征尺寸 (m)，取单元长度的 10 倍； $R$  为反射参数，本文取  $R = 10^{-10}$ ； $c_p$  为弹性纵波波速 (m/s)。

## 2.2 基本方程

如图 1 所示，完美匹配层设置于截断弹性半空间  $\Omega_f$  的周围。其中， $\Gamma_{\text{PML}}^{\text{N}}$ 、 $\Gamma_{\text{PML}}^{\text{D}}$  分别为完美匹配层自由边界和位移边界； $\Omega_{\text{pml}}$  为完美匹配层域； $\mathbf{n}$  为边界曲线的法向量。内部域采用常规位移有限元进行模拟。在截断边界  $\Gamma_{\text{IN}}$  处，完美匹配层通过界面相互作用力  $\pm p$  进行耦合。在坐标伸展前， $\Omega_{\text{pml}}$  上物质的运动满足弹性动力学基本方程：

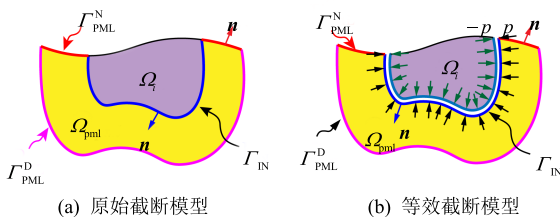


图 1 完美匹配层截断域示意图

Fig.1 Schematic diagrams of a truncated domain by PML

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (8)$$

式中： $\mathbf{L}$  为应变微分算子<sup>[30]</sup>； $\rho$  为材料密度； $\mathbf{D}$  为本构关系矩阵； $\boldsymbol{\sigma}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  分别为向量化的应力和应变张量； $\mathbf{u}$  为位移向量； $\ddot{\mathbf{u}}$  为加速度向量。

相应的边界条件如下：

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{在 } \Gamma_{\text{PML}}^{\text{D}} \times J \text{ 上}) \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (\text{在 } \Gamma_{\text{PML}}^{\text{N}} \times J \text{ 上}) \quad (10)$$

$$-\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \quad \text{且} \quad \mathbf{u}_{\Gamma_{\text{IN}}}^+ = \mathbf{u}_{\Gamma_{\text{IN}}}^- \quad (\text{在 } \Gamma_{\text{IN}} \times J \text{ 上}) \quad (11)$$

式中： $J = [0, T]$  为研究问题的时间区间， $T$  为所研究问题的总时长。二维情形矩阵形式的法向量  $\mathbf{n}$  为

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中： $n_x$ 、 $n_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向的坐标分量。

由式 (1)、(7)、(8)，并按照 Fathi 等<sup>[31]</sup>的推导流程，可以分别得到二维、三维完美匹配层有限元方程。二维情形下，半离散方程如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ua} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{sa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{s}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ub} & \mathbf{A}_{ue} \\ -\mathbf{A}_{se} & \mathbf{M}_{sb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uc} & \mathbf{A}_{up} \\ -\mathbf{A}_{sp} & \mathbf{M}_{sc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中： $\mathbf{F}$  为力向量； $\mathbf{M}_{ui}$ 、 $\mathbf{M}_{si}$  ( $i = a, b, c$ ) 分别为位移自由度、应力自由度对应的对角位置子矩阵， $a$ 、 $b$ 、 $c$  均为参数； $\mathbf{A}_{uj}$ 、 $\mathbf{A}_{sj}$  ( $j = e, p$ ) 分别为位移自由度、应力自由度对应的非对角位置子矩阵。下标  $e$ 、 $p$  为参数； $\dot{\mathbf{u}}$  为速度向量； $\mathbf{s}$ 、 $\dot{\mathbf{s}}$  和  $\ddot{\mathbf{s}}$  分别为应力辅助变量 (向量) 及其对时间的一阶导和二阶导。应力辅助变量  $\mathbf{s}$  定义如下：

$$\mathbf{s} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(t') dt' \quad (14)$$

式中： $t$  为时间 (s)； $t'$  为时间积分变量。

式 (13) 中，各对角位置子矩阵  $\mathbf{M}_{ui}$  和  $\mathbf{M}_{si}$  采用按行求和进行对角化。各子矩阵公式如下：

$$\mathbf{M}_{ui} = \int_{\Omega^e} i \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{si} = \int_{\Omega^e} i \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_s d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_{uj} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_j^T \mathbf{N}_s d\Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_{sj} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (18)$$

式中： $\Omega^e$  为单元域； $d\Omega$  为域微分元素； $\mathbf{B}_j$  ( $j = e, p$ ) 为应变相关矩阵； $\mathbf{N}_u$  和  $\mathbf{N}_s$  分别为位移形函

数和应力形函数；系数  $i$  ( $i=a,b,c$ ) 由二维伸展函数确定，且有

$$a = \alpha_x \alpha_y \quad (19)$$

$$b = \alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x \quad (20)$$

$$c = \beta_x \beta_y \quad (21)$$

式中： $\alpha_x$ 、 $\beta_x$  和  $\alpha_y$ 、 $\beta_y$  分别为  $x$  坐标和  $y$  坐标的缩放函数、衰减函数；式 (17)、(18) 中  $B_j$  ( $j=e,p$ ) 为应变相关矩阵：

$$B_j = L_j N_u \quad (22)$$

微分算子  $L_j$  ( $j=e,p$ ) 计算公式为

$$L_e = \alpha_y L_x + \alpha_x L_y \quad (23)$$

$$L_p = \beta_y L_x + \beta_x L_y \quad (24)$$

其中，算符  $L_x$  和  $L_y$  分别为

$$L_x^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, L_y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

类似地，三维情形下的半离散方程为

$$\begin{bmatrix} M_{ua} & 0 \\ 0 & M_{sa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ub} & A_{ue} \\ -A_{se} & M_{sb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{uc} & A_{up} \\ -A_{sp} & M_{sc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{ud} & A_{uw} \\ -A_{sw} & M_{sd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

式中： $U$  和  $S$  为为了规范方程组引入的辅助变量，且有

$$S = \int_0^t s(t') dt' \quad (27)$$

$$U = \int_0^t u(t') dt' \quad (28)$$

式 (26) 中各子矩阵与式 (13) 具有相同的形式，但系数  $i$  ( $i=a,b,c,d$ ) 由三维伸展函数确定：

$$a = \alpha_x \alpha_y \alpha_z \quad (29)$$

$$b = \alpha_x \alpha_y \beta_z + \alpha_y \alpha_z \beta_x + \alpha_x \alpha_z \beta_y \quad (30)$$

$$c = \alpha_x \beta_y \beta_z + \alpha_y \beta_x \beta_z + \alpha_z \beta_x \beta_y \quad (31)$$

$$d = \beta_x \beta_y \beta_z \quad (32)$$

式中： $\alpha_z$  和  $\beta_z$  分别为  $z$  坐标的缩放函数和衰减函数。

其次，应变相关矩阵  $B_j$  ( $j=e,p,w$ ) 与式 (22) 具有相同的形式，但微分算子  $L_j$  分别为

$$L_e = \alpha_y \alpha_z L_x + \alpha_x \alpha_z L_y + \alpha_x \alpha_y L_z \quad (33)$$

$$L_p = (\alpha_y \beta_z + \beta_y \alpha_z) L_x + (\alpha_x \beta_z + \beta_x \alpha_z) L_y + (\alpha_x \beta_y + \beta_x \alpha_y) L_z \quad (34)$$

$$L_w = \beta_y \beta_z L_x + \beta_x \beta_z L_y + \beta_x \beta_y L_z \quad (35)$$

其中， $L_x$ 、 $L_y$  和  $L_z$  分别为

$$L_x^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$L_y^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$L_z^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

特别地，式 (13) 和式 (26) 中力向量  $F = \{F_{IN} \ 0\}^T$ ，即仅与界面  $\Gamma_{IN}$  自由度对应的耦合项 ( $F_{IN}$ ) 非零，即

$$F_{IN} = \int_{\Gamma_{IN}} N_u^T p d\Gamma \quad (39)$$

式中： $\Gamma_{IN}^-$  为边界积分域； $d\Gamma$  为边界微分元素。

当完美匹配层与内部域耦合时， $F_{IN}$  将与内部位移单元方程中的对应项相抵消。

### 3 离散方案及数值实现

#### 3.1 空间离散方案

如图 2 所示，本文分别构造了 Q4/4 等参单元和 HEX8/8 等参单元对二维、三维完美匹配层的位移-应力混合场（记为  $u$ - $\sigma$  混合场）进行空间离散。图中  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$  为等参坐标。由于 ABAQUS 是位移有限元程序，在实现混合有限元程序时需要进行一

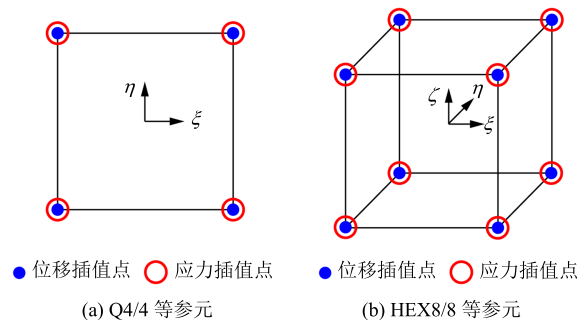


图 2  $u$ - $\sigma$  混合等参单元

Fig.2  $u$ - $\sigma$  mixed isoparametric element

些特殊处理。在 ABAQUS/Explicit 中, 每个节点的自由度存在限制, 仅自由度 1~6、8 (孔隙水压力) 和自由度 11 (温度) 可被使用, 同时 4~6 号自由度的更新模式又不适用于平动位移求解。因此, 需要根据混合单元不同插值点对自由度数量的要求, 合理分配原生位移元的节点及其可用自由度来实现图 2 中的单元。

对于二维 Q4/4 单元, 一个位移插值点需要 2 个位移自由度; 一个应力插值点需要 3 个应力自由度。因此, 如图 3 所示, 可以在原生位移单元 (节点用  $n_o$  表示) 的基础上, 再定义一组重复节点  $n_{c1}$  作为应力插值点。激活原始节点上的自由度 1 和 2 作为位移自由度 ( $u_x, u_y$ ); 激活节点  $n_{c1}$  上的自由度 1、2 和 8 作为应力自由度 ( $s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}$ ), 即可达到与 Q4/4 等参元同样的效果。

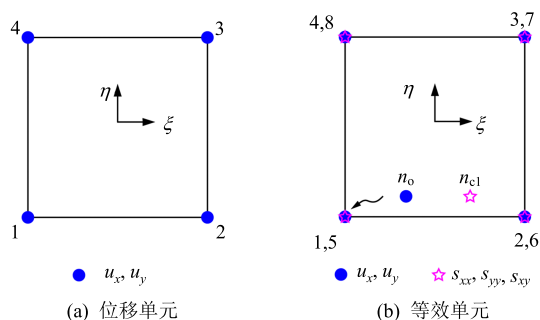


图 3 Q4/4 单元等效示意图

Fig.3 Equivalent schematic of Q4/4 element

对于三维 HEX8/8 等参元, 一个位移插值点需要 3 个位移自由度, 一个应力插值点需要 6 个应力自由度。与二维情形类似, 可以在原生位移单元的基础上, 再定义两组重复节点  $n_{c1}$  和  $n_{c2}$  作为应力插值点。所有节点均激活自由度 1、2 和 3。其中原始节点  $n_o$  用于位移场 ( $u_x, u_y, u_z$ ) 求解; 节点  $n_{c1}$  用于正应力场 ( $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}$ ) 求解; 节点  $n_{c2}$  用于剪应力场求解 ( $s_{xy}, s_{xz}, s_{yz}$ )。

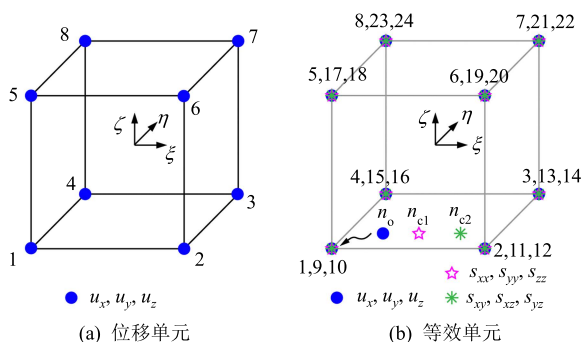


图 4 HEX8/8 单元等效示意图

Fig.4 Equivalent schematic of HEX8/8 element

按照该方法, 先用原生位移单元对 PML 区域进行网格划分, 然后对 INP 文件稍作修改: 复制原生位移单元节点, 并按照单元等效示意图中的节点编号顺序修改单元定义即可得到相应的混合单元。值得一提的是, 采用该混合有限元进行完美匹配层求解时, 二维问题节点自由度数由 2 增加到 5, 三维问题节点自由度数由 3 增加到 9, 增加了每个单元的内存消耗。但是, 得益于显式积分算法的优势, 各单元的力向量求解、拼装及质量矩阵求逆是独立进行的, 极大地提高了算法的并行能力。同时, 该方案所有自定义程序都限制在各子程序内部, 不存在外部自定义数据交互, 因此自然地可以通过 ABAQUS 中的并行计算功能, 采用大规模计算机集群开展计算。通过并行计算技术, 求解任务被拆分, 非常适合于开展大规模动力计算分析。

### 3.2 扩展中心差分法

为便于分析, 本节及 3.3 节将完美匹配层动力方程统一表示为

$$M\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{P} - \mathbf{I} = \mathbf{P} - (\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}) \quad (40)$$

其中:  $\mathbf{P}$  为有限元方程的外力向量;  $\mathbf{I}$  为内力向量;  $\mathbf{u}$  和  $\bar{\mathbf{u}}$  分别表示位移、应力辅助变量组成的广义位移向量及其对时间的积分, 即  $\bar{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u} \quad \mathbf{s}\}^T$ 、 $\bar{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U} \quad \mathbf{S}\}^T$ ;  $\dot{\mathbf{u}}$  和  $\ddot{\mathbf{u}}$  则分别为广义速度向量和广义加速度向量;  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{G}$  则为广义位移向量及其对时间的各阶导数 (或积分) 对应的矩阵, 其中二维情形没有  $\bar{\mathbf{U}}$  向量和  $\mathbf{G}$  矩阵。

ABAQUS/Explicit 内置的积分方案为中心差分法, 积分格式如下:

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{u}}_{k-\frac{1}{2}} + \ddot{\mathbf{u}}_k \frac{\Delta t_k + \Delta t_{k+1}}{2} \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = \bar{\mathbf{u}}_k + \dot{\mathbf{u}}_{k+\frac{1}{2}} \Delta t_{k+1} \quad (42)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长; 下标  $k$  表示积分步数。

如式 (13) 所示, 二维完美匹配层动力方程为二阶, 可以直接采用内置格式进行求解。而三维完美匹配层动力方程为三阶, 不能直接进行求解。该问题有两种处理方案: 一是对方程进行降阶, 二是建立适用于三阶动力方程求解的积分算法直接求解, 其中方案一会显著增加有限元方程的自由度数。因此, 本文将积分格式 (41)、(42) 扩展至三阶情形, 提出了所谓的“扩展中心差分法”进行三维完美匹配层有限元方程求解。

首先, 引入线性速度假设, 公式为

$$\ddot{\mathbf{u}}_k = \frac{\dot{\mathbf{u}}_{k+1} - \dot{\mathbf{u}}_k}{\Delta t_{k+1}} = \text{常数} \quad (43)$$

利用泰勒级数展开可以得到:

$$\bar{U}_{k+1} = \bar{U}_k + \bar{u}_k \Delta t_{k+1} + \frac{\dot{\bar{u}}_k}{2!} (\Delta t_{k+1})^2 + \frac{\ddot{\bar{u}}_k}{3!} (\Delta t_{k+1})^3 \quad (44)$$

显然, 由式 (43) 可得到半步长内有如下关系:

$$\dot{\bar{u}}_{k+\frac{1}{2}} = \dot{\bar{u}}_k + \ddot{\bar{u}}_k \frac{\Delta t_{k+1}}{2} \quad (45)$$

为了与中心差分法积分式 (42) 中保持一致, 在  $\bar{U}_{k+1}$  的积分式中除了  $\bar{U}_k$  和  $\dot{\bar{u}}_k$  外, 只能出现  $k+1/2$  步的速度向量和  $k+1$  步的位移向量。为此, 分别反解出式 (42) 中的  $\bar{u}_k$  和式 (45) 中的  $\dot{\bar{u}}_k$ , 代入式 (44) 中并化简, 得到位移积分项  $\bar{U}$  的积分格式:

$$\bar{U}_{k+1} = \bar{U}_k + \bar{u}_{k+1} \Delta t_{k+1} - \frac{1}{2} \dot{\bar{u}}_{k+\frac{1}{2}} (\Delta t_{k+1})^2 - \frac{1}{12} \ddot{\bar{u}}_k (\Delta t_{k+1})^3 \quad (46)$$

关于积分式 (41)、(42)、(46) 的稳定步长问题不在本文讨论, 使用时通过在二阶情形稳定步长的基础上乘以一个系数来获得稳定解, 即

$$\Delta t \leq \zeta \frac{L_e}{c_p} \quad (47)$$

式中:  $L_e$  为单元特征尺寸 (m), 建议取单元最小边长;  $c_p$  为单元当前纵波波速 (m/s);  $\zeta$  为比例系数。限于完美匹配层理论的特殊性,  $\zeta$  的取值暂未获得可靠的理论结果, 在应用中可以通过试算确定。

### 3.3 二次开发方案

在 VUEL 子程序接口中, 用户需要根据流程标记数组 `lflags` 的指示, 对不同求解流程主程序必须的变量进行定义。本文仅讨论小变形分析时的程序实现过程。

程序执行的基本流程如图 5 所示, 其中常量 `iProcedure = 1`、`iNlgeom = 2` 和 `iOpCode = 3` 为流程标记数组 `lflags` 的索引值。数组元素 `flags(iProcedure)` 用于控制计算流程类型 (直接积分显式动力学取 17); `flags(iNlgeom)` 用于控制分析类型 (小变形分析取为 0); `flags(iOpCode)` 则用于控制 VUEL 待变量的类型, 即 `flags(iOpCode)` 分别取常量 `jMassCalc=1`、`jIntForceAndDtStable=2` 和 `jExternForce=3` 时, 分别计算质量矩阵、内力向量及稳定步长、外力向量。程序执行开始时会调用一次 VUEL 来获得模型的质量矩阵 (数组 `AMASS`); 程序每个迭代步都需要求解方程的右端项 (数组 `RHS`) 和稳定步长 (标量 `DTIMESTABLE`)。特别地, 当  $\Omega_{\text{pml}}$  上作用有集中外力时, 由软件内部自行计算; 而当存在分布外力时, 可以通过在 PML 位移节点上附加一层刚度可以忽略的原生单元进行计算。因此, 仅关注质量矩阵和内力向量的计算。为了提高内力向量  $\mathbf{I}$

的计算效率, 在小变形分析时将矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{G}$  和质量矩阵  $\mathbf{M}$  同时求解并储存在 `SVARS` 数组内, 计算右端项时直接读取矩阵进行计算。

对于三维情形, 还涉及到扩展中心差分程序的实现, 也即位移积分项  $\bar{U}$  的更新。如表 1 所示, 本文利用 `VUFIELD` 子程序来进行实现: 首先在 `INP` 文件中, 用 `*FIELD` 关键字为完美匹配层单元所有位移节点 (图 4 中的 1~8 号节点, 设集合名称为 `NodesSetU`) 声明场变量 (每个节点 3 个场变量) 用于储存  $\bar{U}$  向量; 然后, 在 `VUFIELD` 子程序内按式 (44) 进行更新, 如表 2 所示; 而在 `VUEL` 子程序内, 通过 `PREDEF` 数组来获得  $\bar{U}$  向量的当前值。

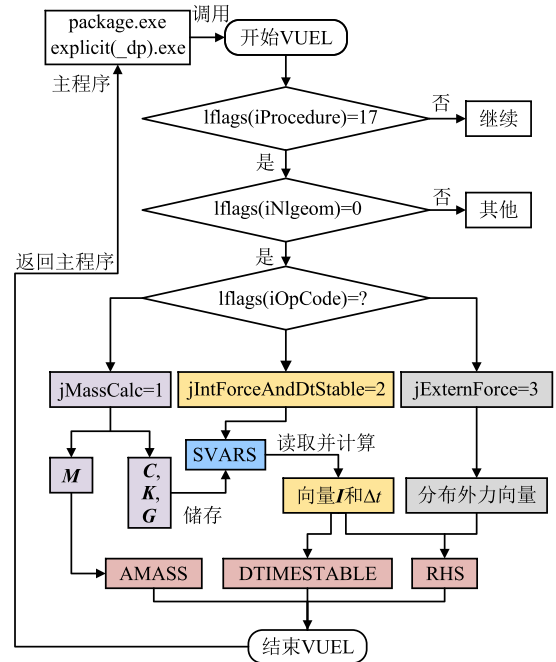


图 5 VUEL 执行流程图

Fig.5 Execution flowchart of VUEL

表 1 数值积分方案实现方法

Table 1 Implementation of numerical integration scheme

| 位置          | 操作方法                                                                                                          |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| .INP 文件     | *FIELD, USER, NUMBER=3, BLOCKING=YES<br>NodesSetU,0,0                                                         |
| VUFIELD 子程序 | 通过输入向量 $\ddot{\bar{u}}_i$ 、 $\dot{\bar{u}}_i$ 、 $\bar{u}_i$ 和 $\bar{U}_i$ , 更新 $\bar{U}_{i+1}$ 并储存在 FIELD 数组内 |
| VUEL 子程序    | 从 PREDEF 数组读取 $\bar{U}_{i+1}$ 向量并进行内力求解                                                                       |

注: \*FIELD、USER、NUMBER、BLOCKING 为 .INP 文件关键字。

## 4 数值验证

本节中, 分别以一维杆系、二维含孔洞均质地层、二维成层地层和三维成层地层模型为例, 对吸收边界进行验证。验证算例中用到的应力时程曲线

表2 VUFIELD 子程序伪代码  
Table 2 Pseudocode of VUFIELD subroutine

| 项目   | 内容                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 输入   | FIELD(NBLOCK, NCOMP, NFIELD), NBLOCK, NCOMP, TIME(4), U(8, NBLOCK), V(8, NBLOCK), A(8, NBLOCK)                                                                                                                                                                                                                                        |
| 输出   | 更新后的 FIELD(NBLOCK, NCOMP, NFIELD) 数组                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 执行流程 | <pre> 1 DT = TIME(2)  (DT 为时间步长) 2 ST = 1/2×DT×DT  (ST 为积分常数) 3 CT = 1/12×DT×DT×DT  (CT 为积分常数) 4 for KCOMP = 1~NCOMP do 5   for KBLOCK = 1~NBLOCK do 6     for J = 1~3 do 7       FIELD(KBLOCK, KCOMP, J) =         FIELD(KBLOCK, KCOMP, J)+DT×U(J, KBLOCK)-         ST×V(J, KBLOCK)-CT×A(J, KBLOCK) 8     end 9   end 10  end </pre> |

分别为 Ricker 子波<sup>[32]</sup>和加汉宁窗的余弦波。其中, Ricker 子波函数  $f(\tau)$  定义为

$$f(\tau) = A_p \left[ 1 - \frac{1}{2} (2\pi f_p)^2 \tau^2 \right] e^{\left[ -\frac{1}{4} (2\pi f_p)^2 \tau^2 \right]} \quad (48)$$

式中:  $\tau$  为含延迟时间 (s), 即用  $\tau = t - t_0$  表示子波函数存在时间延迟  $t_0$  (s);  $A_p$  为幅值;  $f_p$  为峰值频率 (Hz)。当 Ricker 子波峰值频率为 6.0 Hz 时, 对应的单位幅值时程曲线及其频谱如图 6 所示。

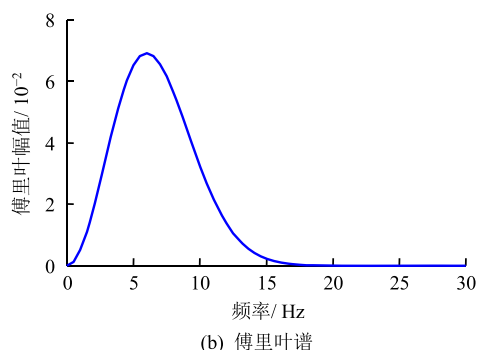
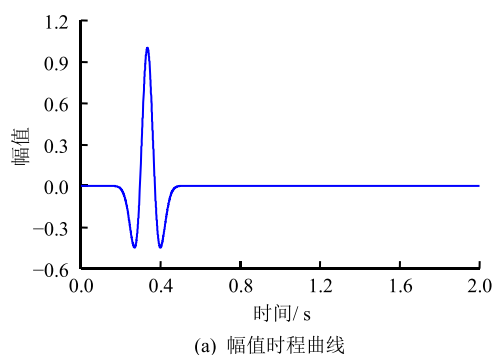


图6 单位幅值 Ricker 子波时程

Fig.6 Ricker wavelet with unit amplitude

汉宁窗余弦波函数  $f(t)$  按下式进行定义:

$$f(t) = \begin{cases} -A \cos(2\pi f_p t) w_h(t), & 0 \leq t \leq t_d \\ 0, & t > t_d \end{cases} \quad (49)$$

式中:  $t_d$  为有效持时 (s), 按余弦波整周期进行取值, 即  $t_d = n_d / f_p$ ; 其中  $n_d$  表示余弦波有效周期数, 本文取  $n_d = 7$ ;  $w_h(t)$  为汉宁窗函数, 公式如下:

$$w_h(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{t_d} \right) \right], \quad 0 \leq t \leq t_d \quad (50)$$

当汉宁窗余弦波函数峰值频率为 4 Hz 时, 对应的单位幅值时程曲线及其频谱如图 7 所示。

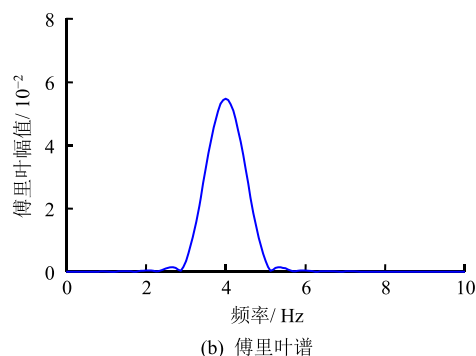
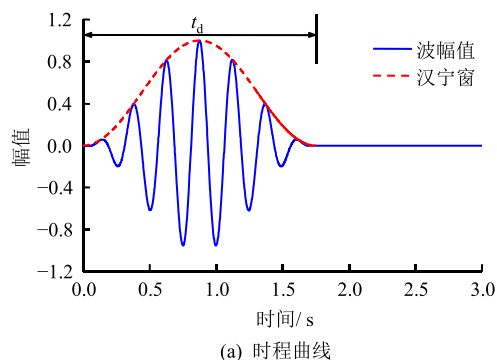


图7 单位幅值汉宁窗余弦波时程

Fig.7 Hann-window cosine wavelet with unit amplitude

#### 4.1 一维杆模型

如图 8 所示, 首先以一维杆系内的右行波吸收问题为例, 讨论不同岩土参数和弹性波频率对完美匹配层吸收性能的影响。模型中杆的长度  $L$  取为 60 m, 截面高度为 1 m。模型采用 CPE4R 单元进行模拟, 通过在杆件左端面施加水平均布荷载  $q(t)$ , 并约束所有节点的竖向位移使杆系内产生理想的平面纵波。参考《城市轨道交通结构抗震设计规范》(GB 50909—2014)<sup>[33]</sup>, 对不同类别岩土体参数进行测试, 所选取的物理力学参数如表 3 所示。

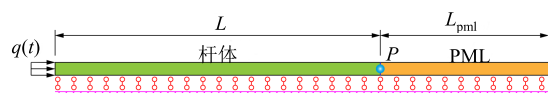


图8 一维杆系截断模型

Fig.8 Truncated model of 1D rod

表 3 岩土体物理力学参数

Table 3 Physical and mechanical parameters of rock mass

| 岩土类别                                                 | $c_s$<br>/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) | $c_p$<br>/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) | $\rho$<br>/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 岩石 ( $c_s > 800 \text{ m/s}$ )                       | 900                                          | 1 559                                        | 2 200                                          |
| 坚硬土 ( $800 \text{ m/s} \geq c_s > 500 \text{ m/s}$ ) | 650                                          | 1 126                                        | 2 100                                          |
| 中硬土 ( $500 \text{ m/s} \geq c_s > 250 \text{ m/s}$ ) | 375                                          | 702                                          | 2 000                                          |
| 中软土 ( $250 \text{ m/s} \geq c_s > 150 \text{ m/s}$ ) | 200                                          | 374                                          | 1 900                                          |
| 软弱土 ( $c_s \leq 150 \text{ m/s}$ )                   | 100                                          | 208                                          | 1 800                                          |

注:  $c_s$ 为弹性横波波速。

考虑到岩土地下工程中动力荷载的频率通常较低, 本小节选取 Ricker 子波峰值频率分别为 2、4、6、8 Hz 进行分析, 荷载幅值取为 100 Pa。为了保证分析精度, 网格尺寸应小于弹性波最短波长的 1/10~1/8。考虑到 Ricker 子波的频带性质, 参考现有文献[27]取输入荷载峰值频率的 3 倍作为最高频率参考值来确定最不利弹性波长。在最不利工况条件下(软弱土、8 Hz 激励, 参考最高频率为 24 Hz), 界限网格尺寸为 0.87~1.08 m, 因此本组数值试验中采用网格尺寸为 1 m (后文均按此原则确定)。扩大模型中, 求解时长内边界反射纵波不应到达监测点, 即杆系长度大于  $(c_p t + 60)/2$ 。按岩石类场地进行计算, 扩大模型长度取保守值为 3 km。

为了评价截断模型和扩大模型响应时程的偏差情况, 采用归一化均方根偏差 NRMSD 进行衡量:

$$\text{NRMSD} = \frac{\sqrt{\sum (\mathbf{x}_{\text{res}} - \mathbf{x}_{\text{ref}})^2 / N}}{\max(|\mathbf{x}_{\text{ref}}|)} \quad (51)$$

式中:  $\mathbf{x}_{\text{res}}$  和  $\mathbf{x}_{\text{ref}}$  分别为截断模型响应时程和扩大模型响应时程;  $N$  为数据点数;  $|\cdot|$  为取绝对值。

图 9 给出了不同岩土类别、不同荷载频率和不同完美匹配层厚度条件下(共 80 个工况), 监测点  $P$  处水平加速度  $A_x$  响应时程与扩大模型结果的归一化均方根偏差 NRMSD。可以看到, 随着完美匹

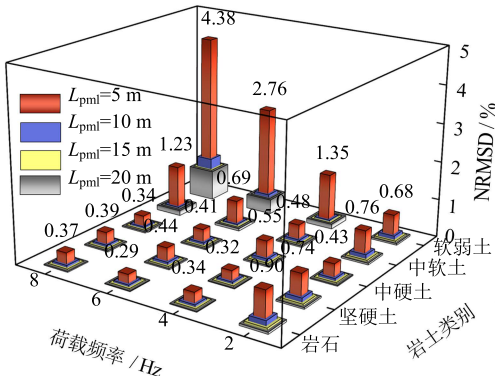


图 9 完美匹配层吸收效果对比

Fig.9 Impact of soil type on absorption effectiveness

配层厚度的增加, 各工况 NRMSD 值显著降低。总体上, 各工况的 NRMSD 值处于较低水平。其中, 当软弱土输入 8 Hz 激励时最为不利, 当完美匹配层厚度为 5 m 时的归一化均方根偏差值为 4.38%。

以最不利工况(软弱土、8 Hz 激励)为例, 更为直观地, 给出不同完美匹配层厚度条件下点  $P$  的水平加速度响应时程曲线, 如图 10 所示。可以看到, 当完美匹配层厚度为 10 m 时(NRMSD=1.07%), 截断模型加速度响应曲线与扩大模型结果已经几乎完全重合, 作者认为已可以满足工程需求; 随着完美匹配层厚度的增加, 二者的吻合度继续增加。综上所述, 本文吸收边界在不同岩土地层条件下, 对不同频率外行波均具有良好的吸收性能。

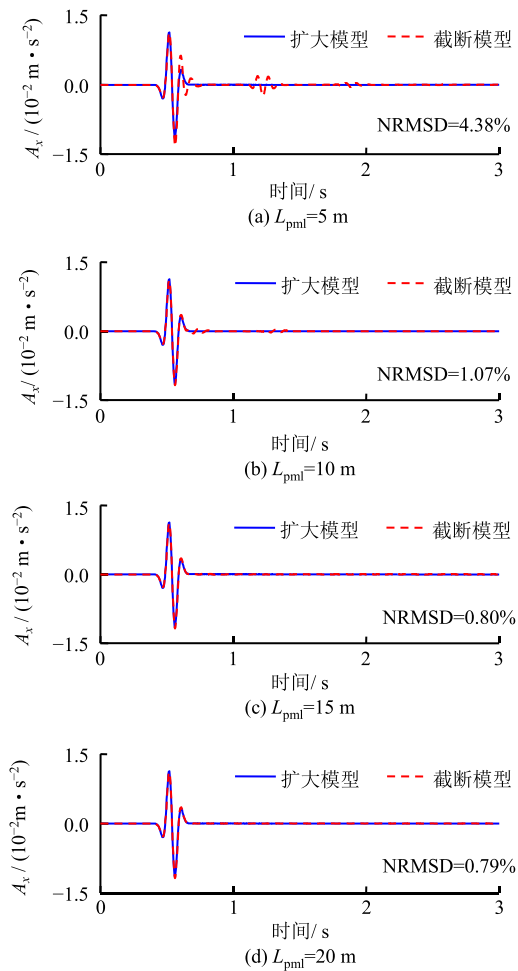


图 10 一维杆加速度响应时程对比

Fig.10 Comparations of acceleration time histories of rod

4.2 二维含孔洞均质地层

本小节中, 以二维含孔洞均质地层为例, 对吸收边界的性能进行分析。如图 11 所示, 模型内部域尺寸为宽×高=380 m×160 m, 外部设置一层 10 m 厚的完美匹配层。分析中, 选用幅值为 100 kPa 的汉



快照可以看到,不同波型以不同的入射角度到达完美匹配层后,均能够随着传播距离的增加较为平滑地发生衰减,无明显反射波产生。

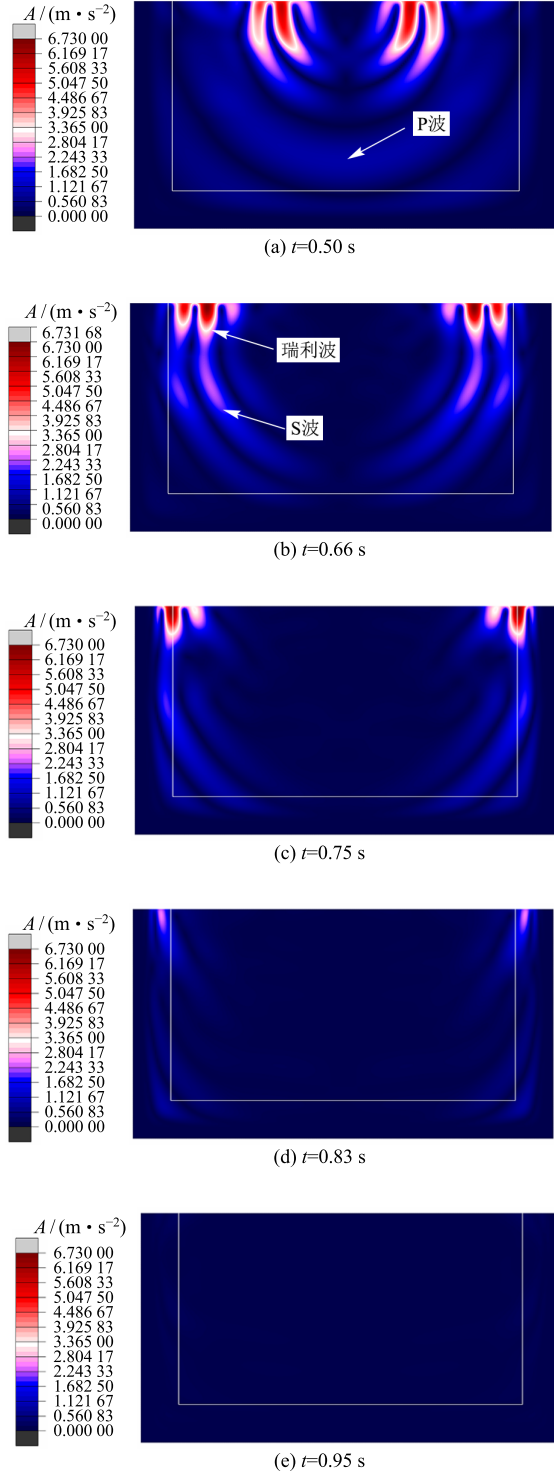


图 14 二维截断模型加速度幅值快照

Fig.14 Snapshot of the magnitude of acceleration in 2D truncated model

考虑到模型对称性,监测点 $P_1$ 和 $P_2$ 的水平位移为0。因此,分别提取 $P_1 \sim P_4$ 的竖向加速度、 $P_3$ 和

$P_4$ 的水平加速度响应时程进行分析,并与扩大模型的结果进行对比,如图15所示。可以看到,不同测点处完美匹配层截断模型的加速度响应和对应的扩

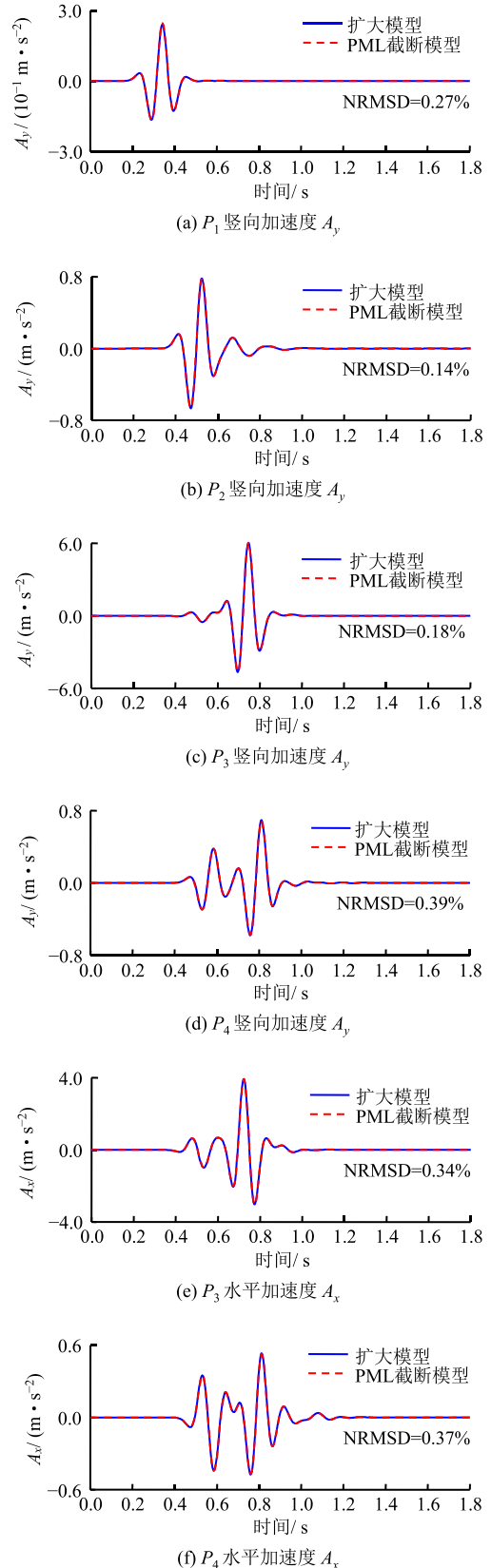


图 15 二维成层地层加速度响应时程

Fig.15 Acceleration time histories of 2D layered medium

大模型结果几乎完全重合，这不仅反映了完美匹配层在复杂波场吸收时的优越性能，还验证了所开发的完美匹配层边界正确且具有较高的精度。同时还可以看到，弹性波消散后（1.2~1.8 s）模型没有出现数值发散，具有较好的长时稳定性。

#### 4.4 三维成层地层

三维成层地层模型如图 16 所示，取截断内部域尺寸为长×宽×高=40 m×40 m×25 m，其外部设置 10 m 厚的完美匹配层。地层沿竖向共两层，厚度分别为 10 m（上层）和 15 m（下层），其中上部地层的物理力学参数为： $E=300$  MPa， $\nu=0.3$ ， $\rho=2\ 000$  kg/m<sup>3</sup>；下部地层的物理力学参数为： $E=400$  MPa， $\nu=0.3$ ， $\rho=2\ 000$  kg/m<sup>3</sup>。模型内部区域采用 ABAQUS 内置的 C3D8R 单元进行模拟；完美匹配层采用本文开发的 HEX8/8 等效单元进行模拟，单元的实际节点数为 24。激励荷载竖直向下施加于地表  $-1\text{ m} \leq x \leq 1\text{ m}$  和  $-1\text{ m} \leq z \leq 1\text{ m}$  范围内，荷载幅值为 1 000 kPa。

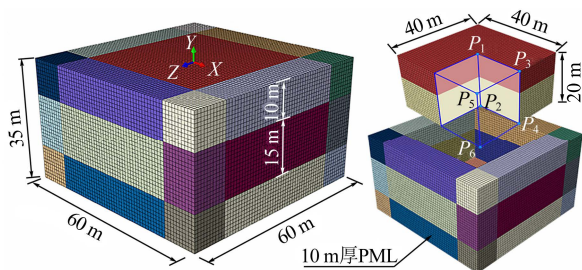


图 16 三维成层地层截断模型

Fig.16 Truncated model of 3D layered half-space

考虑到计算资源的限制及模型对称性，取 1/4 三维成层地层扩大模型进行分析，如图 17 所示。扩大模型单元类型和单元尺寸均与截断模型内部区域一致。因模型几何范围的限制，仅对扩大模型边界

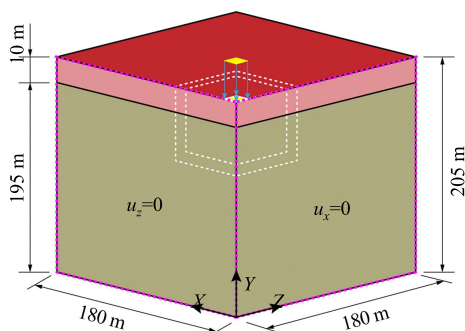


图 17 三维成层地层扩大模型示意图

Fig.17 Schematic diagram of a 3D enlarged model

反射波到达监测点前的动力响应进行求解（经试算求解时长为 0.8 s）。

不同时刻三维成层地层加速幅值快照如图 18 所示，可以看到竖向荷载产生的弹性波到达完美匹配层与内部单元交界面时没有产生明显反射。弹性波进入完美匹配层后随着传播距离的增加幅值逐渐减小，直至消失。

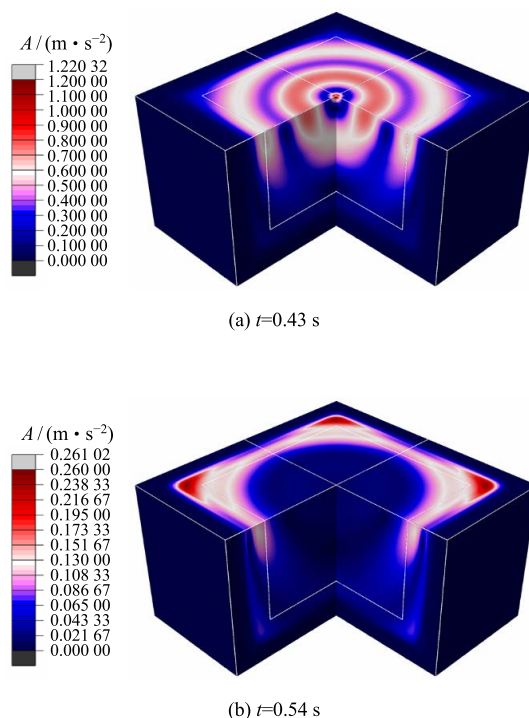


图 18 三维截断模型加速度幅值快照

Fig.18 Snapshot of magnitude of acceleration in 3D truncated model

与二维模型类似，分别对模型内部不同位置的加速度响应时程进行提取分析，验证完美匹配层对“外行波”的吸收效果，监测点布置如图 16 所示。其中，监测点  $P_1$  和  $P_2$  位于对称轴  $Y$  上，因此仅对  $Y$  方向的加速度进行分析； $P_3$  和  $P_4$  位于对称面  $X-O-Y$  上，因此对  $X$  和  $Y$  方向的加速度进行分析；监测点  $P_5$  和  $P_6$  则分别对 3 个方向的加速度时程进行提取，不同位置的加速度响应如图 19 所示。其中  $A_z$  为沿着  $z$  方向的水平加速度。可以看到，各测点不同方向的加速度响应均与扩大模型对应时程吻合较好。各监测点加速度响应时程的归一化均方根偏差 NRMSD 最大值为 1.33%，为监测点  $P_6$  处的竖向加速度响应时程；从该时程曲线可以看出，扩大模型结果与 PML 截断模型结果的差异非常小，能够满足工程应用研究的需求。

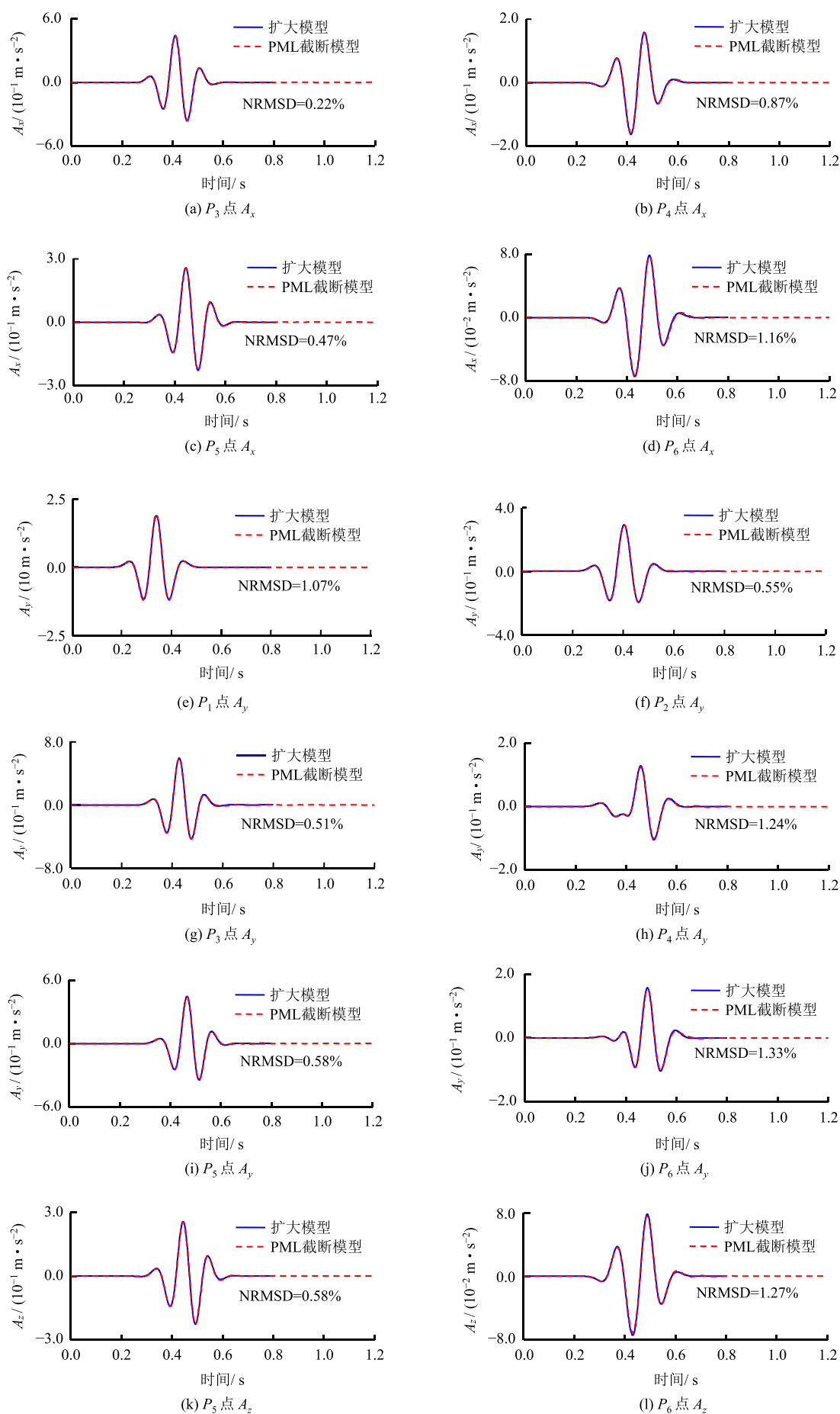


图 19 三维成层地层加速度响应时程

Fig.19 Acceleration time histories of 3D layered medium

考虑到地震动峰值加速度 PGA 是地震反应分析中的重要指标,对各测点处的峰值加速度进行提取,如表 4 所示。可以看到,截断模型中不同监测点处的 PGA 响应与扩大模型结果的最大相对误差为 3.3%,具有较高的精度。

综上所述,证明本文三维完美匹配层对外行弹性波具有良好的吸收性能。

表 4 三维成层地层峰值加速度响应

Table 4 Peak acceleration response of 3D layered medium

| 监测点   | 扩大模型<br>/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) | 截断模型<br>/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) | 相对误差<br>/% |
|-------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|------------|
| $P_1$ | 18.900                                      | 19.524                                      | 3.30       |
| $P_2$ | 0.292                                       | 0.292                                       | 0.00       |
| $P_3$ | 0.636                                       | 0.637                                       | 0.16       |
| $P_4$ | 0.197                                       | 0.193                                       | 2.03       |
| $P_5$ | 0.458                                       | 0.456                                       | 0.44       |
| $P_6$ | 0.192                                       | 0.187                                       | 2.60       |

## 5 讨论

本文在 ABAQUS/Explicit 中实现并验证了基于扩展中心差分法的显式混合有限元时域完美匹配层。其中,有两个方面的问题值得在此略作讨论:首先是混合有限单元的应力过连续问题。本文在二维和三维条件下分别采用 Q4/4 和 HEX8/8 单元进行空间离散。测试发现,如果将应力自由度矩阵与位移自由度矩阵一样进行拼装求解,将会导致完美匹配层响应出现不容忽视的“震荡”,特别在波动频率较高时对数值稳定性影响较大。本文的做法是将每个单元的应力插值点独立生成,即不对应力自由度矩阵进行拼装求解,有效避免了应力过连续的影响。以图 13 中的二维成层地层为例,分别将应力自由度进行独立求解和拼装求解,在  $t = 1.02 \text{ s}$  时左侧完美匹配层内的加速度幅值响应云图如图 20 所示。可以看到,对应

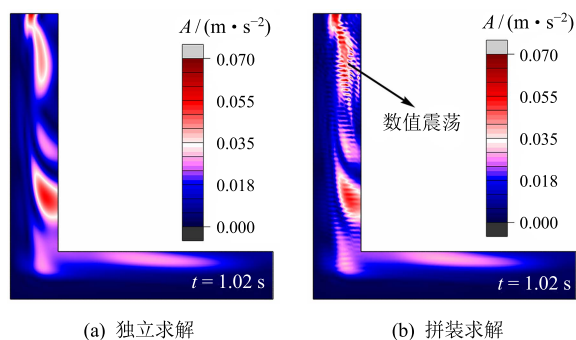


图 20 混合单元应力过连续的影响  
Fig.20 Influences of excessive continuity of stress in mixed element

力自由度拼装求解时的云图连续性较差,产生了类似“沙漏”现象的数值震荡。然而这种数值震荡现象通过添加沙漏刚度是难以抑制的,在应用中应该予以注意。

其次是中心差分法的稳定步长问题。经测试,无论是二维还是三维完美匹配层,其稳定步长均小于相同尺寸的位移元。ABAQUS 中为了保证数值稳定性,一般也会按式 (47) 对理论上的近似稳定步长进行一定的缩放,对于二维模型一般取  $1/\sqrt{2} \leq \zeta \leq 1$ ; 对于三维模型一般取  $1/\sqrt{3} \leq \zeta \leq 1$ 。在本文计算中,比例系数均取为  $\zeta = 0.005$ 。限于完美匹配层理论的特殊性,  $\zeta$  的理论取值尚不清楚,应用中可以通过试算进行确定。以本文 4.1 节中的 10 m 厚完美匹配层、中硬土、6 Hz 激励及 4.2 节中的 8 Hz 激励工况为例,计算不同积分步长时模型加速度幅值响应时程,如图 21 所示。其中,二维含孔洞均质地层监测点设置于内部域右下角。可以看到,两种工况下理想的数值积分比例系数并不相同。过大的积分步长会导致加速度时程末尾出现数值发散。从稳定步长的角度,植入完美匹配层会增加模型的求解时长。因此,当模型自由度较多时,采用并行计算来提高效率是必要的且有效的。以 4.4 节三维成层地层为例,模型总自由度数约为 453 万,在每个节点配置 2 颗 AMD EPYC 7452 处理器(64 个物理核心)的并行集群上计算,时间步长为  $9.6 \times 10^{-6} \text{ s}$ ,

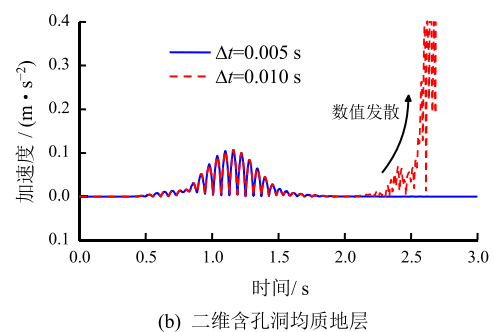
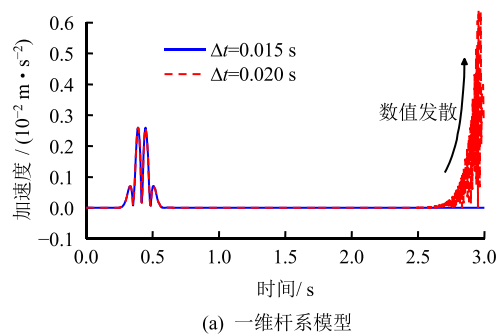


图 21 积分步长对加速度响应的影响  
Fig.21 Effects of time step on acceleration response

配置两个节点满核（128 核）运算时的总耗时为 70 min 左右，求解效率能满足工程需求。

## 6 结 论

（1）提出了基于扩展中心差分法的显式混合有限元时域完美匹配层动力人工边界，并给出了半离散方程和时间积分格式。

（2）利用 ABAQUS/Explicit 中的子程序接口进行了数值实现，给出了实现混合单元和扩展中心差分求解的方法。

（3）通过开展数值试验，验证了所开发的完美匹配层对外行波的吸收效果，结果表明所提出的积分格式及数值实现方案具有良好的稳定性和求解精度。

值得一提的是，限于篇幅本文未对该人工边界的工程应用作进一步讨论。考虑到显式动力有限元在大规模并行分析方面的优势，该人工边界可应用于分析岩土地下工程中的各类外源激励或内源激励问题。主要应用场景包括但不限于近场结构地震动力反应分析、近断层结构地震影响分析、列车振动环境影响分析、爆炸冲击荷载动力影响分析、复杂场地地震反应评估等。针对本文完美匹配层吸收边界，其具体工程应用、参数优化方法、复杂几何边界条件下的适应性问题还值得进一步探讨。

## 参 考 文 献

- [1] 马建勋, MOHAMMEDEI Hoseny, 庞盼望, 等. 考虑土-结构相互作用的地下室层对高层建筑地震反应影响研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(9): 2808-2822.  
MA Jian-xun, MOHAMMEDEI Hoseny, PANG Pan-wang, et al. Effects of basement stories on seismic response of high-rise buildings considering soil-structure interaction[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2024, 45(9): 2808-2822.
- [2] 王滢, 赵彩清, 王海萍. 隧道内爆炸荷载作用下衬砌及周围非饱和土的动力响应解答[J]. 岩土力学, 2024, 45(4): 1026-1038.  
WANG Ying, ZHAO Cai-qing, WANG Hai-ping. Dynamic response solution of lined tunnel in unsaturated soil under internal explosive loading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2024, 45(4): 1026-1038.
- [3] 厉超, 庄培芝, 李利平, 等. 局域共振超材料表面波屏障带隙特性与隔振性能[J]. 岩土力学, 2024, 45(3): 750-758.  
LI Chao, ZHUANG Pei-zhi, LI Li-ping, et al. Band gap characteristics and vibration isolation performance of locally resonant metamaterial surface wave barrier[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2024, 45(3): 750-758.
- [4] 刘晶波, 谷音, 杜义欣. 一致黏弹性人工边界及黏弹性边界单元[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(9): 1070-1075.  
LIU Jing-bo, GU Yin, DU Yi-xin. Consistent viscous-spring artificial boundaries and viscous-spring boundary elements[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(9): 1070-1075.
- [5] ZHANG W, SEYLABI E E, TACIROGLU E. An ABAQUS toolbox for soil-structure interaction analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2019, 114: 103143.
- [6] LYSMER J, KUHLEMEYER R L. Finite dynamic model for infinite media[J]. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, 1969, 95(4): 859-877.
- [7] 刘晶波, 王振宇, 杜修力, 等. 波动问题中的三维时域黏弹性人工边界[J]. 工程力学, 2005, 22(6): 46-51.  
LIU Jing-bo, WANG Zhen-yu, DU Xiu-li, et al. Three-dimensional visco-elastic artificial boundaries in time domain for wave motion problems[J]. **Engineering Mechanics**, 2005, 22(6): 46-51.
- [8] 李述涛, 刘晶波, 宝鑫, 等. 采用黏弹性人工边界单元时显式算法稳定性分析[J]. 工程力学, 2020, 37(11): 1-11.  
LI Shu-tao, LIU Jing-bo, BAO Xin, et al. Stability analysis of explicit algorithms with viscoelastic artificial boundary elements[J]. **Engineering Mechanics**, 2020, 37(11): 1-11.
- [9] 廖振鹏, 周正华, 张艳红. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现[J]. 地球物理学报, 2002, 45(4): 533-545.  
LIAO Zhen-peng, ZHOU Zheng-hua, ZHANG Yan-hong. Stable implementation of transmitting boundary in numerical simulation of wave motion[J]. **Chinese Journal of Geophysics**, 2002, 45(4): 533-545.
- [10] ZIENKIEWICZ O C, EMSON C, BETTESS P. A novel boundary infinite element[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1983, 19(3): 393-404.
- [11] KUCUKCOBAN S, KALLIVOKAS L F. A mixed perfectly-matched-layer for transient wave simulations in axisymmetric elastic media[J]. **Computer Modeling in Engineering & Sciences (CMES)**, 2010, 64(2): 109-145.
- [12] DEEKS A J, RANDOLPH M F. Axisymmetric time-domain transmitting boundaries[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1994, 120(1): 25-42.
- [13] 谷音, 刘晶波, 杜义欣. 三维一致黏弹性人工边界及等效黏弹性边界单元[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 31-37.

- GU Yin, LIU Jing-bo, DU Yi-xin. 3D consistent viscous-spring artificial boundary and viscous-spring boundary element[J]. **Engineering Mechanics**, 2007, 24(12): 31-37.
- [14] 于彦彦, 芮志良, 丁海平. 三维局部场地地震波散射问题谱元并行模拟方法[J]. **力学学报**, 2023, 55(6): 1342-1354.
- YU Yan-yan, RUI Zhi-liang, DING Hai-ping. Parallel spectral element method for 3D local-site ground motion simulations of wave scattering problem[J]. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 2023, 55(6): 1342-1354.
- [15] TEIXEIRA F L, CHEW W C. Complex space approach to perfectly matched layers: a review and some new developments[J]. **International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields**, 2000, 13(5): 441-455.
- [16] KUCUKCOBAN S, KALLIVOKAS L F. Mixed perfectly-matched-layers for direct transient analysis in 2D elastic heterogeneous media[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2011, 200(1-4): 57-76.
- [17] PLED F, DESCELIERS C. Review and recent developments on the perfectly matched layer (PML) method for the numerical modeling and simulation of elastic wave propagation in unbounded domains[J]. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 2022, 29(1): 471-518.
- [18] 王瑞, 胡志平. 铁路路基动力响应的 2.5D 有限元方法研究现状及展望[J]. **岩土力学**, 2024, 45(1): 284-301.
- WANG Rui, HU Zhi-ping. Current situation and prospects of 2.5D finite element method for the analysis of dynamic response of railway subgrade[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2024, 45(1): 284-301.
- [19] BERENGER J. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. **Journal of Computational Physics**, 1994, 114(2): 185-200.
- [20] CHEW W C, LIU Q H. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition[J]. **Journal of Computational Acoustics**, 1996, 4(4): 341-359.
- [21] BASU U, CHOPRA A K. Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2003, 192(11-12): 1337-1375.
- [22] BASU U. Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2009, 77(2): 151-176.
- [23] KUCUKCOBAN S, KALLIVOKAS L F. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media[J]. **Wave Motion**, 2013, 50(1): 57-79.
- [24] FATHI A, KALLIVOKAS L F, POURSAITIP B. Full-waveform inversion in three-dimensional PML-truncated elastic media[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2015, 296: 39-72.
- [25] 廉西猛, 单联瑜, 隋志强. 地震正演数值模拟完全匹配层吸收边界条件研究综述[J]. **地球物理学进展**, 2015, 30(4): 1725-1733.
- LIAN Xi-meng, SHAN Lian-yu, SUI Zhi-qiang. An overview of research on perfectly matched layers absorbing boundary condition of seismic forward numerical simulation[J]. **Progress in Geophysics**, 2015, 30(4): 1725-1733.
- [26] 彭刚, 刘云龙, 陈灯红, 等. 基于完美匹配层人工边界的坝-基动力相互作用研究[J]. **岩土力学**, 2022, 43(11): 3144-3152.
- PENG Gang, LIU Yun-long, CHEN Deng-hong, et al. Study on the dam-foundation dynamic interaction based on artificial boundary of perfectly matched layer[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2022, 43(11): 3144-3152.
- [27] ZHANG G L, ZHAO M, ZHANG J Q, et al. Scaled boundary perfectly matched layer (SBPML): a novel 3D time-domain artificial boundary method for wave problem in general-shaped and heterogeneous infinite domain[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2023, 403: 115738.
- [28] POUL M K, ZERVA A. Time-domain PML formulation for modeling viscoelastic waves with Rayleigh-type damping in an unbounded domain: theory and application in ABAQUS[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2018, 152: 1-16.
- [29] 朱升冬, 陈国兴, 陈炜昀, 等. 土的次非线性对桩基核岛结构三维地震反应的影响[J]. **岩土力学**, 2023, 44(5): 1501-1511.
- ZHU Sheng-dong, CHEN Guo-xing, CHEN Wei-yun, et al. Influence of soil secondary nonlinearity on 3D seismic responses of a pile-founded nuclear island structure[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2023, 44(5): 1501-1511.